سلم تصحيح المعادلات الرياضية الفيزيائية سنة ثالثة رياضيات دورة ٣ - ٢٠١٦

جواب السؤال الأول (٣٠ درجة): المعادلة المعطاة تكتب على الشكل

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u_y+u\right]+y\left[u_y+u\right]=e^{-(x+1)y}$$

نجري التحويل $u_y+u=w$ فتصبح:

$$w_x+y\cdot w=e^{-(x+1)y}$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية خطية عادية الحل العام لها هو:

$$w=x\,e^{-(x+1)y}+\psi(y)\,e^{-xy}$$

حيث ψ دالة تابعة لـ y فقط. وبالتالي نجد أن:

$$u_y+u=x\,e^{-(x+1)y}+\psi(y)\,e^{-xy}$$

بتثبيت x نحصل على معادلة تفاضلية خطية عادية الحل العام لها هو:

$$u(x,y)=-e^{-(x+1)y}+e^{-y}\int_0^y\psi(z)\,e^{(1-x)z}\,dz+e^{-y}\,\varphi(x)$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة، حيث φ دالة تابعة لـ x فقط.

إيجاد الحل الخاص

من عبارة الحل العام نجد:

$$u_y=(x+1)\,e^{-(x+1)y}-e^{-y}\int_0^y\psi(z)\,e^{(1-x)z}\,dz+\psi(y)\,e^{-xy}-e^{-y}\,\varphi(x)$$

من الشروط المرافقة وعبارة الحل العام وعبارة u_y نجد أن:

$$\psi(x)=-e^{-x}\quad;\quad\varphi(x)=\frac{1}{x}\left(1-e^{-x^2}\right)$$

بالتعويض في عبارة الحل العام نحصل على الحل الخاص من الشكل:

$$u(x,y)=-e^{-(x+1)y}+\frac{e^{-y}}{x}\left(e^{-xy}-e^{-x^2}\right)$$

مدرس المقرر

#

جـ/ السؤال الثاني (16 درجة): سنفرض بحث عن حل المعادلة بالشكل

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

حيث T دالة تابعة لـ t فقط، و X تابعة لـ x فقط.

نشتق ونبدل في المعادلة نحصل على:

$$X'' \cdot T = \frac{1}{a^2} T'' \cdot X$$

وبعد تقسيم الطرفين على $X(x) \cdot T(t) \neq 0$ نحصل على العلاقة:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T}$$

طرفا العلاقة الأخيرة في العلاقة الأخيرة مستقلان عن بعضهما ... فهي ثابتة ... كتابتها بالشكل:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda = 0$$

... $\lambda = 0$ ... الزمن. ومنه نحصل على:

$$X''(x) = 0, \quad T''(t) + a^2 \cdot 0 \, T(t) = 0, \quad T''(t) = \ldots$$

الشروط المرافقة تعطي:

$$X(0) = X(\ell) = 0$$

حل المعادلة الأولى ...

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان كيفيان يتحددان من الشروط المرافقة:

$$X(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X(\ell) = c_1 \cdot \ell + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \ell = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

وبالتالي في هذه الحالة عندما $\lambda = 0$ نحصل على الحل الصفري $X(x) = 0$

وهذا المطلوب

#

السؤال الثالث (34 درجة): سوف نبحث عن الحل الخاص بالشكل: (21)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث t متغير بارامتري، $u_n(t)$ دوال مجهولة يطلب تعيينها. ومن أجل تعيين الدالة $u(x,t)$ يجب تعيين الدوال $u_n(t)$.

لأجل ذلك نمثل الدالة $f(x,t)$ المعطاة على شكل سلسلة:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث:

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi$$

بتعويض عبارة الحل، ونشر ... في المعادلة المعطاة، نحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left\{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 u_n(t)+u_n'(t)-f_n(t)\right\}=0$$

هذه العلاقة محققة إذا كانت معاملات المفكوك مساوية للصفر، أي إذا كان:

$$u_n'(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t)=f_n(t)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ذات أمثال ثابتة من المرتبة الأولى. الحل العام لها هو:

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\cdot f_n(\tau)\,d\tau+c_1$$

من الشروط المرافقة نعتبر $u_n(0)=0$ أي أن $c_1=0$ وبالتالي:

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\cdot f_n(\tau)\,d\tau$$

وبالتالي الحل الخاص قد تم تحديده وهو المطلوب.

تطبيق: لدينا:

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-n^2(t-\tau)}\cdot f_n(\tau)\cdot d\tau$$

حيث:

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-t}\cdot \sin\xi\cdot \sin n\xi\, d\xi$$

$$=\begin{cases}0, & n\neq 1\\ e^{-t}, & n=1\end{cases}$$

وبالتالي:

$$u_n(t)=0,\quad n\neq 1$$

$$n=1\Rightarrow u_1(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot e^{-\tau}\,d\tau=t\cdot e^{-t}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ t\,e^{-t}, & n = 1 \end{cases}$$

وهذا من المطلوب بعد:

$$u(x,t) = u_1(t)\cdot \sin x = t\,e^{-t}\cdot \sin x$$

وهو المطلوب

#

السؤال الرابع (20 درجة): الحل المطلوب يعطى بالدستور:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot Y_n(\theta,\varphi)$$

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} n\, r^{n-1} \cdot Y_n(\theta,\varphi)$$

التالي:

$$u + u_r = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n + n\, r^{n-1}\right) Y_n(\theta,\varphi)$$

r = 1 نجد:

$$(u+u_r)\big|_{r=1} = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)\, Y_n(\theta,\varphi)$$

$$= Y_0 + 2\cdot Y_1 + 3Y_2 + \dots$$

$$= a_0 + 2\cdot\left(a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta\right) + 3\left[a_2(3\cos^2\theta - 1) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta\right] + \dots$$

لدينا:

$$(u+u_r)\big|_{r=1} = \sin\theta\left[\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right] + 2 + (\sin 2\varphi - 1)\cdot\sin^2\theta \;;\; (\sin 2\varphi\cdot\sin^2\theta - 1 + \cos^2\theta \dots$$

نجد أن:

$a_0 - 3a_2 = -1$; $2c_1 = \frac{1}{2}$; $2b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2a_1 = 0$;

$9a_2 = 1$; $3e_2 = 1$, $3d_2 = 0$, $3b_2 = 0$, $3c_2 = 0$

ومنه نجد أن:

$a_0 = -\frac{2}{3}$; $a_2 = \frac{1}{9}$; $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $c_1 = \frac{1}{4}$, $e_2 = \frac{1}{3}$

بقية الثوابت معدومة. والحل هو:

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{2}{3} + r\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\right)\sin\theta\right] + r^2\left[\frac{1}{9}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{3}\sin 2\varphi\cdot\sin^2\theta\right]$$

وهو المطلوب

#

الدكتور